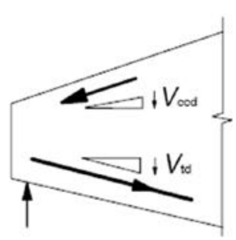
EFFECTEN OP DWARSKRACHT IN CONSTRUCTIES MET VERLOPENDE HOOGTE

RUBRIEK NORMBESEF

Dit is het zevende artikel in de *Cement*-rubriek Normbesef.
In deze rubriek kunnen lezers onduidelijkheden in de constructeurspraktijk, bijvoorbeeld in de regelgeving, aankaarten.
Let wel: Hoewel de artikelen worden beoordeeld door experts, betreft het de persoonlijke interpretatie van de auteur. Aan de inhoud kunnen dan ook geen rechten worden ontleend. De artikelen geven ook niet altijd een antwoord of oplossing.
Het doel van de rubriek is de sector te informeren over onduidelijkheden en daarmee een discussie op gang brengen. Dit kan leerzaam zijn, zo meent de redactie van *Cement*. Uiteraard voor de normcommissie, maar ook voor collega-constructeurs.
Het uiteindelijke doel van de rubriek is meer duidelijkheid voor iedereen en in sommige gevallen misschien zelfs betere normen.
Een uitgebreidere toelichting op de rubriek staat in het artikel 'Nieuwe rubriek over normen: Normbesef' op *Cementonline*.

Heb je zelf ook een onderwerp voor deze rubriek, neem dan contact op met Jacques Linssen, j.linssen@aeneas.nl. Publicatie kan eventueel anoniem.

Een verlopende hoogte in een constructie heeft effect op de grootte van de inwendige dwarskracht. Dat kan leiden tot onverwachte zaken, waarmee in de praktijk niet altijd goed rekening wordt gehouden.



Figuur 1. Dwarskrachtcomponent voor elementen met verlopende hoogte (figuur 6.2 uit EC2)

Iedere constructeur kent wel artikel 6.2.1(2) uit NEN-EN 1992-1-1 (EC2), waarin staat aangegeven dat de dwarskrachtweerstand van een element met dwarskrachtwapening gelijk is aan (formule 6.1):

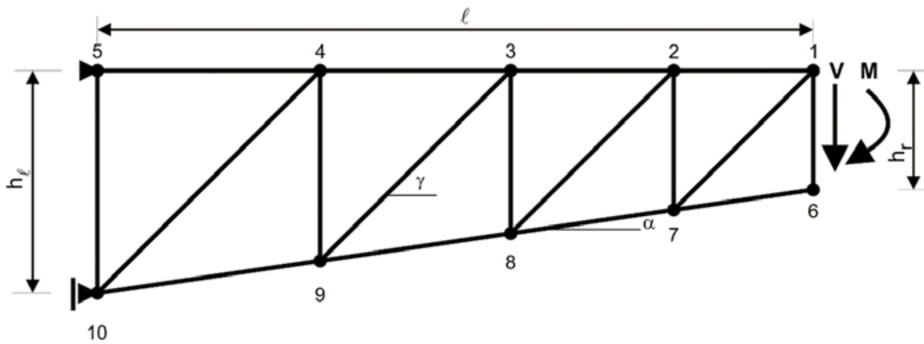
$$V_{Rd} = V_{Rd,s} + V_{ccd} + V_{td}$$

Voor elementen met verlopende hoogte wordt deze vergelijking toegelicht met figuur 6.2 uit Eurocode 2 (fig. 1). Feitelijk komt het erop neer dat de voor dwarskracht benodigde hoeveelheid beugels in een ligger met verlopende hoogte mag worden gereduceerd tot:

$$V_{Rd,s} = V_{Rd} - V_{ccd} - V_{td}$$

Doorsneden met dwarskrachtwapening

Om een beter beeld te krijgen van wat er met een ligger met verlopende hoogte gebeurt, wordt een vakwerkanalogie beschouwd. Daarbij wordt uitgegaan van het in figuur 2 weergegeven vakwerk van een aan één zijde ingeklemde ligger die aan het vrije uiteinde



Figuur 2. Vakwerk van ligger met verlopende hoogte

auteur

IR. HANS GALJAARD

wordt belast door een moment M en dwarskracht V. Een positief moment en dwarskracht komen hierbij overeen met de aangegeven richtingen.

De lengte van de ligger is l, de hoogte links h_l en rechts h_r. De helling van de onderrandstaaf is $\alpha = 15°$, en voor de eenvoud die van de diagonalen $\gamma = 45°$, en van de bovenrandstaaf $\beta = 0°$. De relatie tussen h_l en h_r volgt dus uit $h_l = h_r + l \cdot \tan\alpha$.
Als wordt aangenomen dat $h_r = 1$ m, dan geldt voor $l = 9{,}263$ m en voor $h_l = 3{,}482$ m op een heel aantal velden uit te komen.

Voor deze afleiding zijn een aantal goniometrische relaties gebruikt. De horizontaal gemeten lengte van één vak van het vakwerk volgt uit:

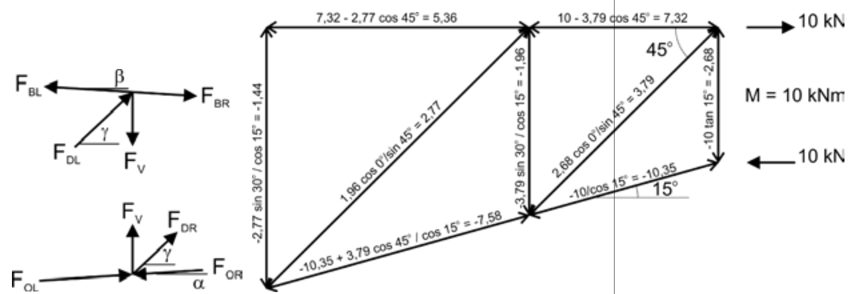
$$l_v = h_{vr} \cdot \sin\gamma \cdot \cos\alpha \big/ \sin(\gamma - \alpha)$$

met h_{vr} de hoogte van het beschouwde vak aan de rechterzijde. Voor de hoogtetoename geldt

$$\Delta h = l_v \cdot (\tan\alpha + \tan\beta)$$

De krachten in de verticalen van dit vakwerk worden bepaald voor een dwarskracht $V = 10$ kN of een moment $M = 10$ kNm. De resultaten zijn weergegeven in tabel 1.

In het vakwerk gelden de volgende evenwichtsrelaties (fig. 3):



Figuur 3. Evenwichtsrelaties in vakwerk

- $F_{DL} = -F_V \cdot \cos\beta \big/ \sin(\beta + \gamma)$
- $F_{OL} = F_{OR} + F_{DR} \cdot \cos\gamma \big/ \cos\alpha$
- $F_{BL} = F_{BR} - F_{DL} \cdot \cos\gamma \big/ \cos\beta$
- $F_V = -F_{DR} \cdot \sin(\gamma - \alpha) \big/ \cos\alpha$

Het, schijnbaar opvallende, resultaat is dus dat de inwendige dwarskracht in de ligger afneemt terwijl de uitwendige dwarskracht constant blijft. Verder valt op dat door het moment een tegengestelde dwarskracht ontstaat.
Bij het eveneens in tabel 1 weergegeven moment $M = 37{,}32$ kNm blijkt de som van de inwendige dwarskracht door de uitgeoefende dwarskracht en moment zelfs nul te worden.

Dit is op zich niet zo vreemd – het snijpunt van de boven- en onderrandstaaf bevindt zich 1 m / tan α = 1 m / tan 15° = 3,73 m rechts van het vakwerk. Een →

Tabel 1 Uitwerking krachten in vakwerk in kN

Staaf	V = 10 kN	M = 10 kNm	M = 37,32 kNm
1 – 6	10	−2.68	−10
2 – 7	7.32	−1.96	−7.32
3 – 8	5.36	−1.44	−5.36
4 – 9	3.92	−1.05	−3.92
5-Oct	2.87	−0.77	−2.87

moment M = 37,32 kNm komt dus overeen met een dwarskracht die exact in het snijpunt van de boven- en onderrand aangrijpt, en dus geheel kan worden opgenomen door de normaalkrachten in deze staven.

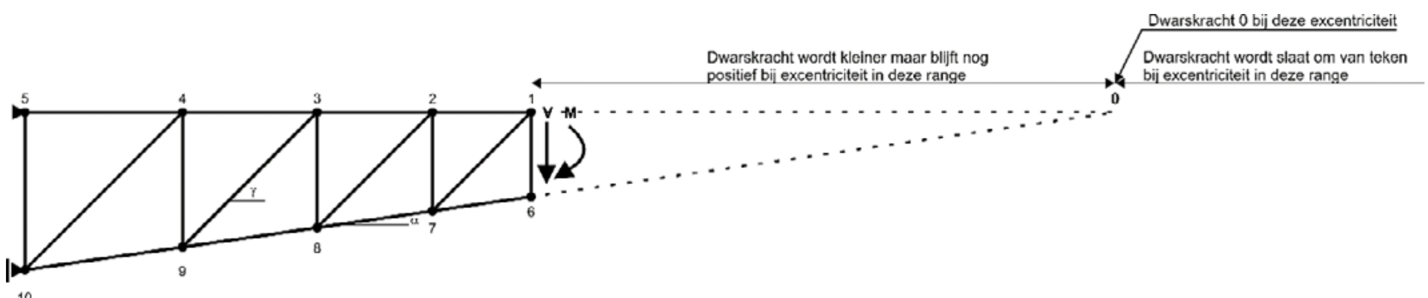
In figuur 4 wordt weergegeven wat dit betekent. Het moment kan worden gezien als een dwarskracht die met een bepaalde excentriciteit wordt uitgeoefend. Met toenemende excentriciteit neemt de inwendige (niet de uitwendige) dwarskracht af totdat deze nul wordt, als de excentrische dwarskracht samenvalt met het snijpunt van de boven- en onderrand. Wanneer de excentriciteit nog groter wordt, dan zal de inwendige dwarskracht een aan de uitwendige dwarskracht tegengesteld teken krijgen. Bij een moment dat in verhouding groot is ten opzichte van de dwarskracht, kan de inwendige dwarskracht niet alleen van teken omslaan, maar in absolute zin zelfs **groter** worden dan de uitwendige dwarskracht.

Wanneer in plaats van α = 15° wordt aangehouden α = 0° en β = 15°, verandert wel de geometrie en krachtswerking in het vakwerk, maar bij een moment M = 37,32 kNm blijft de inwendige dwarskracht nog steeds gelijk aan nul!

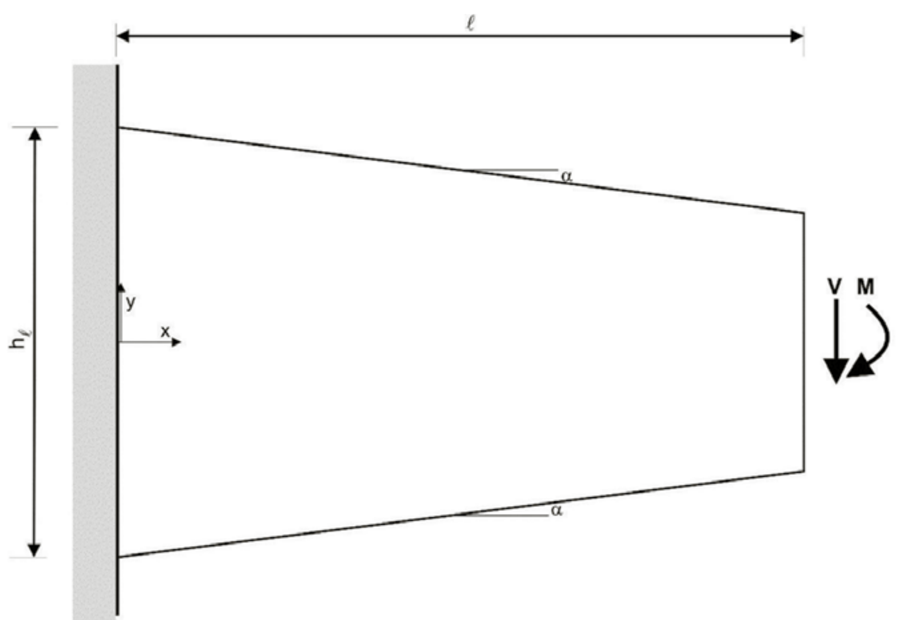
Lineair elastische doorsneden

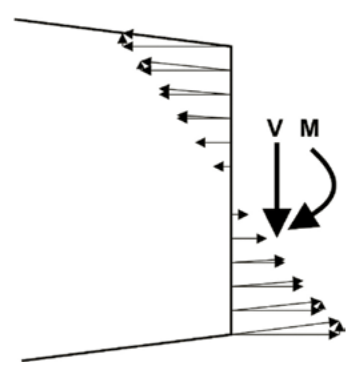
Nu kan de vraag worden gesteld hoe het dan zit met een nog volledig elastische (ongescheurde) ligger. Hiertoe wordt uitgegaan van een uitkragende ligger met constante breedte en verlopende hoogte (fig. 5). Om de afleiding wat eenvoudiger te houden krijgen boven- en onderrand dezelfde helling zodat geldt $\tan \alpha + \tan \beta = \tan 15° \Rightarrow \alpha = \beta = 7{,}631°$.

De 'vezels' in deze balk liggen nu niet meer evenwijdig met de balk-as, maar neigen steeds meer naarmate ze verder naar buiten liggen. Door het buigend moment ontstaan spanningen in de balk die, doordat de vezels



Figuur 4. Betekenis snijpunt in relatie tot inwendige dwarskracht in vakwerk





Figuur 6. Verticale krachten als gevolg van het buigend moment

Figuur 5. Uitkragende ligger met verlopende hoogte niet evenwijdig aan de zwaartelijn liggen, ook een verticale component hebben (fig. 6).

De grootte van deze verticale component ten gevolge van het uitgeoefende moment *M* volgt uit:

$$V_M = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{M \cdot y}{I} \cdot \left(\frac{y}{h/2} \cdot \frac{DxDy}{2} \right) \cdot b_y dy = \frac{M \cdot DxDy}{I \cdot h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b_y dy = \frac{M \cdot DxDy}{h}$$

Waarin $DxDy = (h_l - h_r) / l$ - de relatieve hoogtetoename van de ligger

De grootte van de inwendige dwarskracht in iedere snede, ongeacht de vorm van de doorsnede, volgt dus uit:

$$V_{in} = V_{uit} - V_M = V_{uit} - \frac{M_{uit} \cdot DxDy}{h} \qquad (1)$$

Waarin h de hoogte van de beschouwde doorsnede is.

Voor een ligger waarbij de boven- en onderrand een hoek α = 7,631° hebben, geldt $DxDy$ = 0,268. Het snijpunt van de boven- en onderrand van de ligger ligt bij een hoogte h_r = 1 m op 1 m / 0,268 = 3,731 m rechts van het balkeinde. Als de uitwendige dwarskracht als het ware aangrijpt in dit punt geldt voor V_{in}:

$$V_{in} = V_{uit} - \frac{V_{uit} \cdot 3{,}731 \cdot 0{,}268}{1} = 0$$

Eenvoudig is na te gaan dat dit voor iedere doorsnede in deze uitkragende ligger zal gelden.

Vergelijking (1) is toepasbaar voor elk type doorsnede, en zelfs op het vakwerk. Nadere bestudering leert:

• Eerder was al getoond dat een groot uitgeoefend moment in verhouding tot de uitgeoefende dwarskracht tot omkering van de dwarskracht kan leiden. Deze bevinding volgt ook uit vergelijking (1).

• Bij een ligger die lager wordt naar de oplegging toe, is *DxDy* negatief. Hierdoor zal de inwendige dwarskracht in de ligger toenemen en groter worden dan de uitwendige dwarskracht.

• Bij een ligger waarbij het moment een tegengesteld teken heeft zal de inwendige dwarskracht ook groter worden dan de uitwendige dwarskracht.

Waarom niet voor doorsneden zonder dwarskrachtwapening?

De vraag kan worden gesteld waarom artikel 6.2.1(2) niet geldt voor liggers zonder dwarskrachtwapening. Hier is op dit moment geen eenduidig antwoord op mogelijk, maar kan wel het volgende worden opgemerkt:

• Leonhardt beschrijft dit fenomeen in paragraaf 8.6.2 [1]. Daarbij wordt uitsluitend ingegaan op met beugels gewapende doorsneden. Wat Leonhardt 50 jaar geleden heeft opgeschreven, vindt nog steeds zijn weerslag in de huidige Eurocode. De in dit artikel afgeleide vergelijking (1) komt in Leonhardt ook terug (als door E. Mörsch [2] en H. Bay afgeleid [3]):

$$\text{red } Q = Q - \frac{M}{h} \tan\varphi$$

Waarbij φ de som van de hellingen van de buitenzijde van de ligger is.

• Het berekenen van het dwarskrachtdraagvermogen van liggers zonder beugels is nog voor een groot gedeelte gestoeld op empirisch onderzoek. Er lijkt onvoldoende onderzoek te zijn gedaan om artikel 6.2.1(2) van EN 1992-1-1 ook van toepassing te kunnen verklaren voor constructies zonder dwarskrachtwapening. Het artikel moet wellicht wel worden uitgebreid, omdat een verlopende hoogte ook blijkt te kunnen leiden tot een **toename** van de dwarskracht.

Conclusie

Een verlopende hoogte heeft effect op de grootte van de dwarskracht in de constructie, ongeacht of uitgegaan wordt van een vakwerk of een balkvormige constructie. De dwarskracht blijkt te kunnen afnemen ten opzichte van de op de ligger uitgeoefende dwarskracht, maar onder bepaalde voorwaarden ook juist te kunnen **toenemen**. De meeste door constructeurs gebruikte software houdt echter geen rekening met dit fenomeen, waardoor de constructeur dit zelf zal moeten verwerken.
De vraag kan worden gesteld hoe belangrijk het is om rekening te houden met dit effect. Belangrijk daarbij is te beseffen dat voutes veelal juist worden toegepast om geen dwarskrachtwapening te hoeven toepassen. Zolang de dwarskracht alleen kleiner wordt, is dat geen enkel probleem. Het kan wel problematisch worden als de dwarskracht van teken omkeert en zelfs groter wordt dan de dwarskracht volgens de oorspronkelijke dwarskrachtenlijn. Er zijn bij de auteur een paar voorbeelden bekend waar dit een rol zou kunnen spelen.

Literatuur

1. Leonhardt, F., & Mönnig, E., Vorlesungen über Massivbau - Erster Teil - Grundlagen zur Bemessung im Stahlbetonbau. Stuttgart: Springer Verlag, 1973.
2. Mörsch, E., Die Bemessung im Eisenbetonbau – 5 Aufl., Stuttgart, Konrad Wittwer, 1950.
3. Bay, H., Wandartige Träger und Bogenscheiben. Stuttgart, Konrad Wittwer, 1960.